Úloha 1.

Hokejový zápas NHL mezi týmy Tampa Bay Lightning () a Florida Panthers () dopadl 3:4 pro Floridu. Mezi střelce zápasu se zapsali: Jaromír Jágr, Aleksander Barkov, Brad Boyes, Aaron Ekblad, Anton Stralman, Steven Stamkos a Tyler Johnson.

(a) Kolik existuje různých pořadí střelců?

(b) Při tomto pořadí střelců:

1. Jaromír Jágr
2. Anton Stralman
3. Aleksander Barkov
4. Brad Boyes
5. Aaron Ekblad
6. Steven Stamkos
7. Tyler Johnson

lze vývoj skóre zaznamenat jako . Každý vývoj skóre (každé pořadí log týmů) se objeví při několika pořadích střelců. Při kolika?

(c) Zjistěte, kolika způsoby se mohlo vyvíjet skóre zápasu (tj. kolik existuje pořadí log týmů).

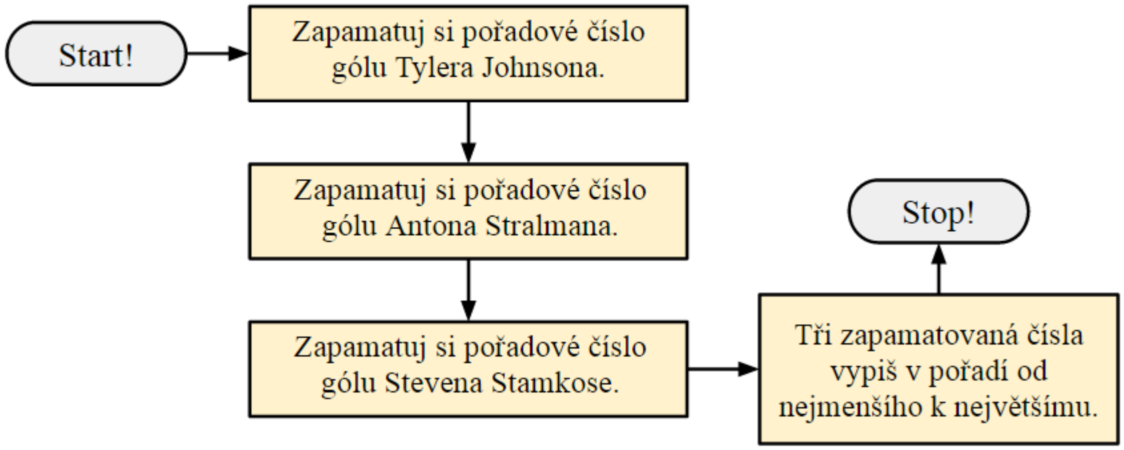
Úloha 2.

(a) Kolika způsoby se mohlo vyvíjet skóre zápasu Tampy proti Floridě, který skončil 3:4 pro Floridu?

(b) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)}?$$

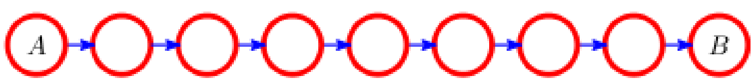
(c) Následující program pracuje se seznamem střelců ze zápasu Tampy proti Floridě. Kolika možnými výpisy může program skončit? Možné výpisy jsou například (2,6,7), (1,3,5).



(d) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}?$$

(e) Městský dopravní podnik se rozhodl výrazně urychlit linku ze zastávky A do B. Nová linka pojede stále z A do B, ale na trase budou zrušeny 4 stanice. Kolika způsoby to lze provést?



Úloha 3.

(a) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu

$$\frac{9!}{4! \cdot 5!}?$$

(b) Žaneta měla devět krychlí očíslovaných čísly 1 až 9 v nějakém pořadí seřazených za sebe do řady. Pak krychle s čísly 1 až 5 přebarvila nabílo a tyto bílé krychle vrátila na jejich původní místa v řadě. Úplně stejně přebarvila načerno krychle s čísly 6 až 9 a též je vrátila. Kolik různých pořadí černých a bílých krychlí mohla získat?

(c) Kolik je pětiprvkových podmnožin devítiprvkové množiny?

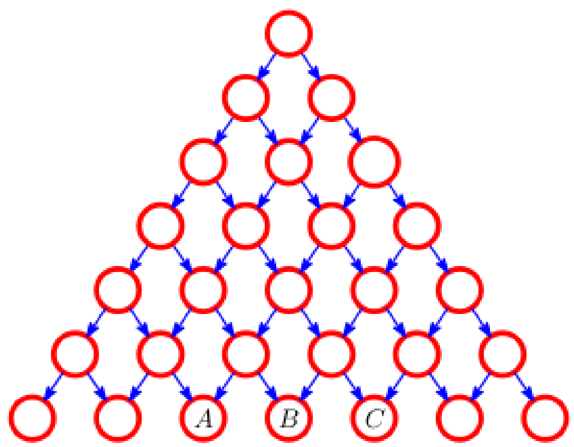
(d) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu čísla

$$\binom{9}{5}?$$

(e) Čtyři kluci a pět holek se navzájem dobře znají. Pět z těchto známých se sešlo na párty u jednoho z kluků (hostitel a 4 hosté). Kolika způsoby lze pětici účastníků párty vybrat?

Úloha 4.

(a) Kolika různými cestami se dá dostat z nejsevernějšího města do města A?



(b) Kolik nápisů délky šest lze sestavit ze dvou znaků $\searrow$ a čtyř znaků $\swarrow$?
(Např. $\swarrow\swarrow\swarrow\swarrow\searrow\searrow$ nebo $\swarrow\swarrow\searrow\swarrow\swarrow\searrow$.)

(c) Kolika různými cestami se dá dostat z nejsevernějšího města do města C?

(d) Kolika různými cestami se dá dostat z nejsevernějšího města do města B?

(e) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu

$$\binom{6}{2}?$$

Úloha 5.

(a) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu

$$\binom{n}{k}?$$

(b) Kolika způsoby lze ze skupiny n lidí vybrat k-člennou reprezentaci?

(c) Kolika způsoby lze ze skupiny n lidí vybrat $n-k$ lidí, kteří se nedostanou do reprezentace?

(d) Která z ostatních úloh vás vede k výpočtu

$$\binom{n}{n-k}?$$

Úloha 6.

Ve skupinách C a D se hrály kvalifikační zápasy. První tři týmy z každé skupiny postupily do finálové skupiny. Kvalifikační skupiny dopadly jako na obrázku.

Švédsko	Česko
USA	Finsko
Norsko	Dánsko
Rakousko	Lotyšsko

Ve finálové skupině je možné dosáhnout libovolného pořadí týmů. V kolika z nich skončí

(a) Česká republika před Finskem? (ne nutně bezprostředně)

(b) Česká republika před Finskem i Dánskem? (Mohly se mezi ně vklínit i další týmy.)

(c) postupující týmy ze skupiny D ve vzájemně stejném pořadí? (Tj. ČR před Finskem a Finsko před Dánskem, ale ne nutně bezprostředně.)

(d) postupující týmy z obou skupin ve vzájemně stejném pořadí?

Úloha 7.

Šestnáct hráčů hraje turnaj vyřazovacím systémem (tzv. pavouk). Je známo, kdo je 1. favoritem, 2. favoritem, 3. favoritem, atd. až 16. favoritem. Počítač hráče zcela náhodně rozmístí do pavouka.

(a) Předpokládejme, že všechny zápasy vyhraje favorit. Kolikátý favorit by se ještě mohl dostat do finále?

(b) Kolikátý favorit by se ještě mohl dostat do finále, pokud by každý hráč mohl jednou překvapit (tj. porazit více favorizovaného hráče)?

Shrnutí: Pro počet způsobů, kterými lze vybrat z n objektů skupinu k objektů, platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}.$$

V čitateli je součin k čísel, která se postupně o jedna snižují.

Pokud v předchozím výrazu vynásobíme čitatel i jmenovatel číslem $(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots 2\cdot 1$ (tedy číslem $(n-k)!$) nebo pokud provedeme úvahu z úlohy o obarvování kuliček, dojdeme k vyjádření

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

V úloze o vybírání k reprezentantů a $n-k$ nereprezentantů jsme viděli, že platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$